phormulário 2018

Matemática II

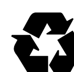


Formulário

ÍNDICE:

1. Progressão Aritmética 2
2. Progressão Geométrica 2
3. Análise Combinatória 2
4. Probabilidade 3
5. Trigonometria 3
6. Funções Trigonométricas 4
7. Operações com Arcos 4
8. Polígonos 5
9. Triângulos 5
10. Quadriláteros 6
11. Polígonos Regulares 7
12. Semelhança de Triângulo 8
13. Ângulos na Circunferência 8
14. Relações Métricas na Circunferência 9
15. Relações Métricas no Triângulo Retângulo 9
16. Áreas 10
17. Poliedros 12
18. Prismas 12
19. Pirâmide 13
20. Cilindro 14
21. Cone 14
22. Esfera 15

Autor: Paulo Silva
"Todos os direitos reservados por Curso PH Ltda."



O pH só utiliza papéis certificados FSC, produzidos a partir de fontes renováveis.

1. Progressão Aritmética

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ é P.A. $\Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = r$

a_n é o termo na n-ésima posição

r é a razão da P.A.

Classificação:

→ Crescente: $r > 0$
→ Constante: $r = 0$
→ Decrescente: $r < 0$

Notação Especial:

→ Para 3 termos: $(x - r, x, x + r)$
→Para 4 termos: $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$
→ Para 5 termos: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

Termo Geral:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Média aritmética:

Numa P.A., se $a, b, e\ c$ são termos consecutivos, $b = \dfrac{a+c}{2}$.

Soma dos n primeiros termos: $Sn = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$

2. Progressão Geométrica

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ é P.G. $\leftrightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$

a_n é o termo na n-ésima posição
q é a razão da P.G.

Classificação:

→ Crescente:

Termos positivos e $q > 1$
Termos negativos e $0 < q < 1$

→ Constante: $q = 1$

→ Decrescente:

Termos positivos e $0 < q < 1$
Termos negativos e $q > 1$

→ Alternante: $q < 0$

Notação Especial:

→ Para 3 termos: $\left(\frac{x}{q}, x, x.q\right)$
→ Para 4 termos: $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$
→ Para 5 termos: $\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2\right)$

Termo Geral:

$a_n = a_1.q^{n-1}$

Média Geométrica:

Numa P.A., se a, b e c são termos consecutivos,
$b^2 = a.c$

Soma dos n primeiros termos: $S_n = \dfrac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$

Soma dos termos de uma P.A. infinita e decrescente:

$$S_{n \to \infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Produto dos n primeiros termos: $P_n = a_1^n \,.\, q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

3. Análise Combinatória

Princípio fundamental da contagem:

$$N = N(e_1).N(e_2). \ldots .N(e_n)$$

Fatorial: $n! = n.(n - 1).(n - 2). \ldots . 3.2.1$

Permutação Simples: $P_n = n!$

Permutação com repetição:

$$P_n^{a_1, a_2, a_3, \ldots} = \frac{n!}{a_1!\, a_2!\, a_3! \ldots}$$

Arranjo: $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Combinação: $C_{n,p} = \dfrac{n!}{n!(n-p)!}$

Permutação circular: $PC_n = (n - 1)!$

4. Probabilidade

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

A: Evento aleatório interessante
E: Espaço amostral

Teoremas:

1) $P(E) = 1$

2) Probabilidade de um evento impossível é 0.

3) Se $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ então
$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n)$

4) $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

5) $0 \leq P(A) \leq 1$

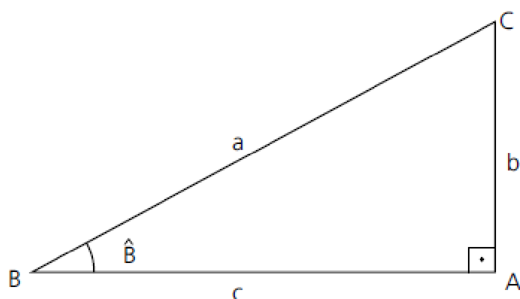
Probabilidade complementar: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Probabilidade da união de dois eventos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(A) - P(A \cap B)$

Probabilidade condicional: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

5. Trigonometria



Razões Trigonométricas:

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a}$

$\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$

$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c}$

$\text{cossec}\,\hat{B} = \frac{1}{\text{sen}\,\hat{B}}$

$\sec\hat{B} = \frac{1}{\cos\hat{B}}$

$\text{cotg}\,\hat{B} = \frac{1}{\text{tg}\,\hat{B}}$

Relações:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$
$\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$

Ângulos complementares:

Se $\alpha + \beta = 90º$, então

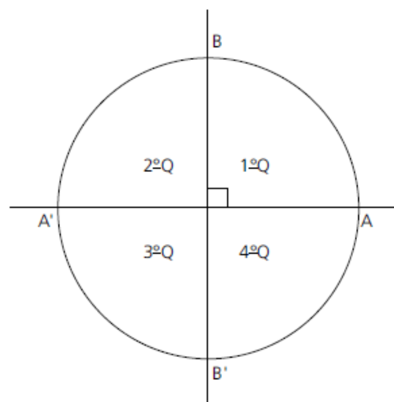
$\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$
$\cos\alpha = \text{sen}\,\beta$
$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\beta}$

Ângulos Notáveis:

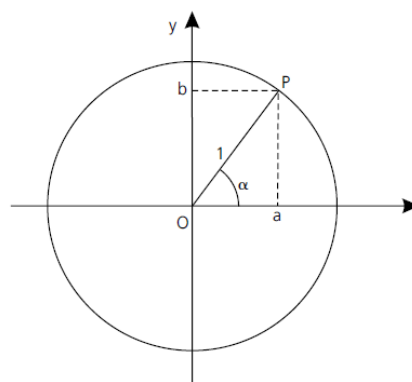
	30°	45°	60°
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSSENO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Círculo Trigonométrico:

É um círculo de raio 1 divido em quatro quadrantes da seguinte maneira



P(a, b) é um ponto sobre a circunferência que forma um arco ∝ com o eixo das abcissas.



$\text{sen} \propto = b$ e $\cos \propto = a$

Sinais das razões por quadrante:

	1º Q	2º Q	3º Q	4º Q
seno	+	+	−	−
cosseno	+	−	−	+

	1º Q	2º Q	3º Q	4º Q
tangente	+	−	+	−

6. Funções Trigonométricas

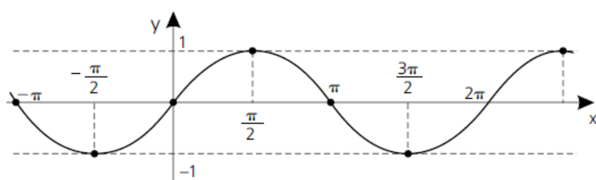
Função seno:

f(x) = sen x

Dm(f) = R

Im(f) = [– 1, 1]

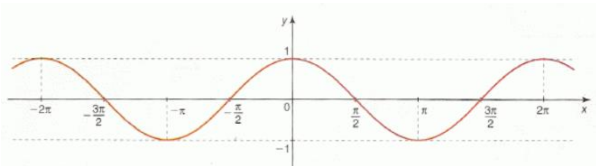
Período = 2π



Função cosseno:

f(x) = cosx

Dm(f) = R
Im(f) = [– 1, 1]
Período = 2π



Alterações gráficas:

f(x) = A + B.sen(Cx + D)

ou

f(x) = A + B. cos(Cx + B)

Dm(f) = R
Im(f) = [A – |B|, A + |B|]

Período = $\frac{2\pi}{C}$

As constantes Causam alterações no gráfico nas seguintes características:

A → Translação vertical.
B → Amplitude
C → Período
D → Translação horizontal

Redução ao primeiro quadrante:

Sendo x um ângulo do 1º quadrante, temos as seguintes relações:

Redução do 2º para o 1º quadrante

$\text{sen}(\pi - x) = -\text{sen } x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\text{tg}(\pi - x) = -\text{tg } x$

Redução do 3º para o 1º quadrantes

$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen } x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\text{tg}(\pi + x) = -\text{tg } x$

Redução do 4º para 1º quadrante

$\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen } x$
$\cos(2\pi - x) = -\cos x$
$\text{tg}(2\pi +-x) = -\text{tg } x$

7. Operações Com Arcos

Adição e subtração de arcos:

sen (a + b) = sen a .cos b + sen b . cos a

sen (a – b) = sen a .cos b – sen b . cos a

cos (a + b) = cos a . cos b – sen a . sen b

cos (a-b)=cos a . cos b+sen a . sen b

$$\text{tg }(a+b)=\frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

$$\text{tg }(a-b)=\frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Arco duplo:

sen 2a = 2.sen a . cos b
$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$
$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
$\cos 2a = 1 - 2\text{sen}^2 a$
$\text{tg } 2a = \frac{2\text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$

Arco triplo:

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$
$\text{sen } 3a = 3\text{sen } a - 4\text{sen}^3 a$

8. Polígonos

Nomes dos polígonos:

3 lados – triângulo
4 lados – quadrilátero
5 lados – pentágono
6 lados – hexágono
7 lados- heptágono
8 lados – octógono
9 lados – eneágono
10 lados – decágono
11 lados – unodecágono
12 lados – dodecágono
20 lados – icoságono

Soma dos ângulos internos: $S_{ai} = 180(n - 2)$

Soma dos ângulos externos: $S_{ae} = 360º$

Número de diagonais: $d = \frac{n(n-3)}{2}$

Número de diagonais que passam pelo centro:

$$\begin{cases} \frac{n}{2}, \text{ se n é par} \\ 0, \text{ se n é ímpar} \end{cases}$$

9. Triângulos

Classificação:

1) Quanto aos lados

→ Escalenos: 3 lados diferentes
→ Isósceles: 2 lados iguais
→ Equiláteros: 3 lados iguais

2) Quanto aos ângulos

→ Acutângulo: 3 ângulos agudos
→ Retângulo: 1 ângulo reto
→ Obtusângulo: 1 ângulo obtuso

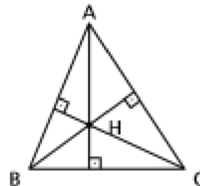
Desigualdades:

1) O maior lado é sempre oposto ao maior ângulos do triângulo.

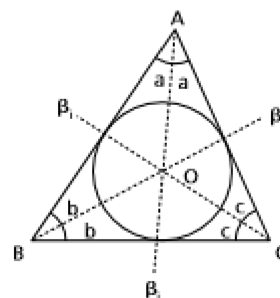
2) Um lado é sempre menor que a soma dos outros dois.

Pontos notáveis:

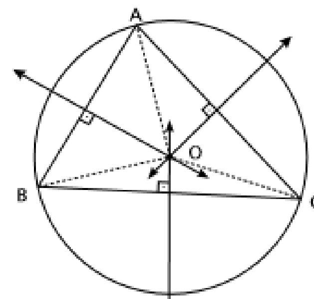
1) Ortocentro: encontro das alturas.



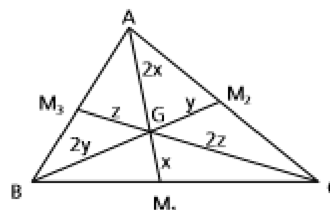
2) Incentro: encontro das bissetrizes e centro da circunferência inscrita.



3) Circuncentro: encontro das mediatrizes e centro da circunferência circunscrita.

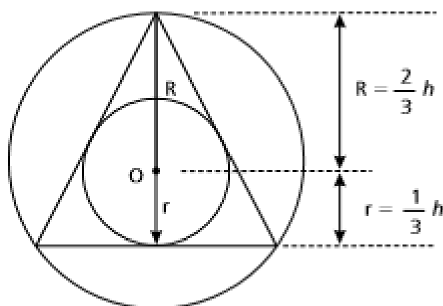


4) Baricentro: Encontro das medianas. O ponto divide a mediana em duas partes na proporção 2 para 1.

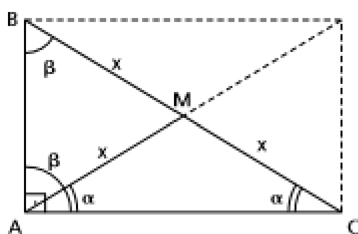


Propriedades:

1) No trângulo isósceles a altura relativa a base também é mediana e bissetriz.
2) No triângulo equiláteros todas as alturas são mediatrizes, medianas e bissetrizes. Então, o baricentro também é ortocentro, incentro e circuncentro.



3) No triângulo retângulo a mediana relativa a hipotenusa vale a metade da hipotenusa.

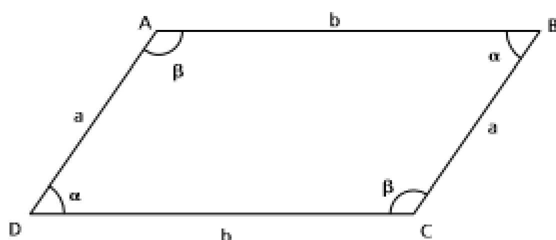


10. Quadriláteros

Elementos:

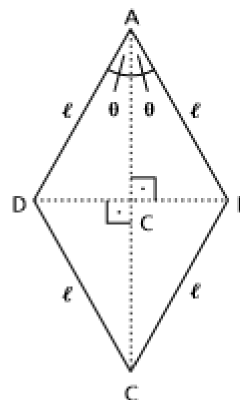
1) Possui duas diagonais
2) Soma dos ângulos internos = 360°
3) Soma dos ângulos externos = 360°

Paralelogramo:



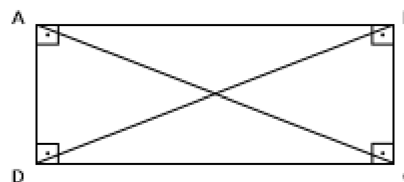
A) Os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.
B) Os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.
C) Os lados opostos de um paralelogramo são iguais.
D) As diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.

Losango:



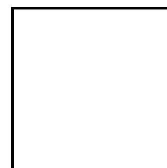
A) Paralelogramos com todos os lados iguais
B) Diagonais formam um ângulo de 90°

Retângulo:



A) Paralelogramos com ângulos de 90°
B) Diagonais iguais

Quadrado:



A) Losango e retângulo
B) Polígono regular de quatro lados.

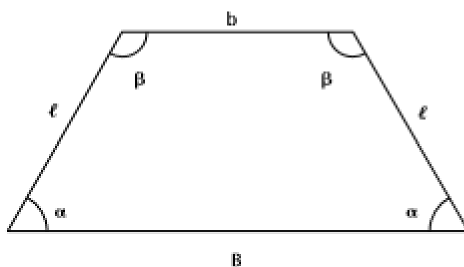
Trapézio:

Quadrilátero com um par de lados paralelos.

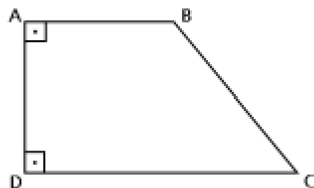
A) Escaleno: Lados oblíquos diferentes



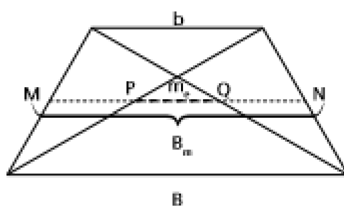
B) Isósceles: Lados oblíquos iguais



C) Retângulos:Dois ãngulos retos



D) Base Média e Mediana de Euler

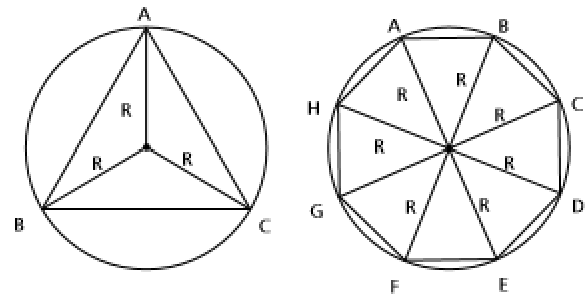


$$\begin{cases} \overline{MN} = \dfrac{B+b}{2} \\ \overline{PQ} = \dfrac{B-b}{2} \end{cases}$$

11. Polígonos Regulares

Propriedade:

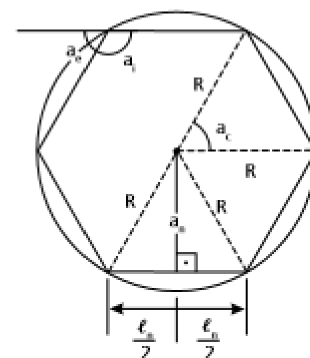
Todo polígono regular é inscritível e circunscritível.



Elementos:

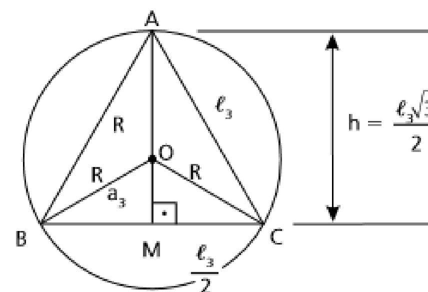
→ Centro do polígono regular é o centro das circunferências

→ Apótema é a distância entre o centro e o lado do polígono. Também pode ser interpretado como o raio da circunferência inscrita.



$$a_n^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = R^2$$

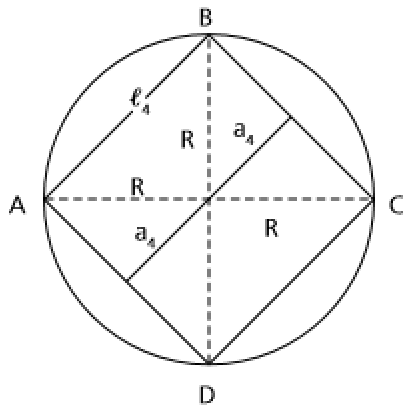
Triângulo equilátero:



$$l_3 = R\sqrt{3}$$

$$a_n = \frac{R}{2}$$

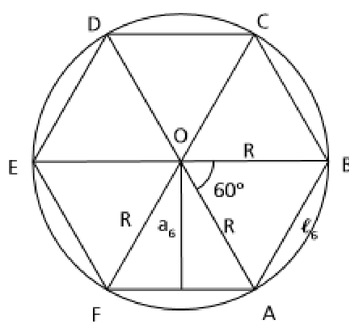
Quadrado:



$l_4 = R\sqrt{2}$

$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Hexágono regular:



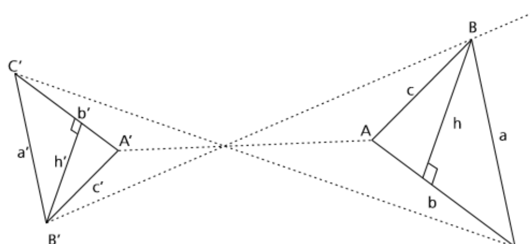
$l_6 = R$

$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

12. Semelhança de Triângulo

Definição:

Dois triângulos são semelhantes quando tem 3 ângulos correspondentes iguais. Isso faz com que as razões entre os pares de lados correspondentes seja igual.



Casos:

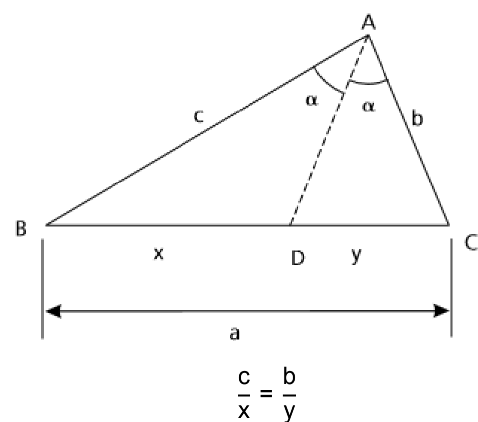
1) AA → ângulo-ângulo
2) LAL → lado-ângulo-lado
3) LLL → lado-lado-lado

Escala:

$$\text{Escala} = \frac{\text{Desenho}}{\text{Realidade}}$$

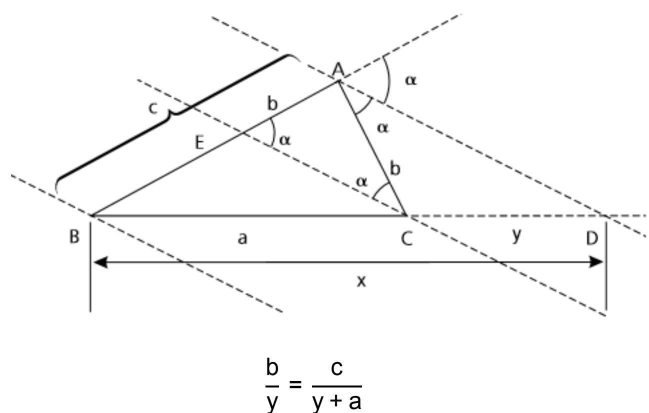
Teorema da bissetriz:

a) Interna



$$\frac{c}{x} = \frac{b}{y}$$

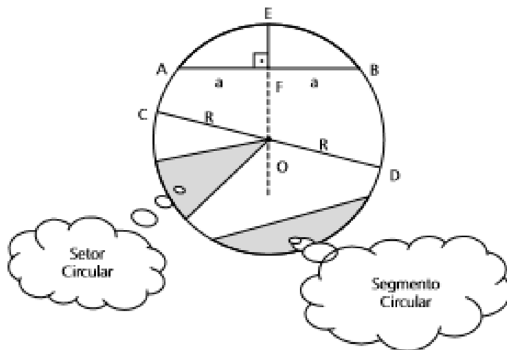
b) Externa



$$\frac{b}{y} = \frac{c}{y+a}$$

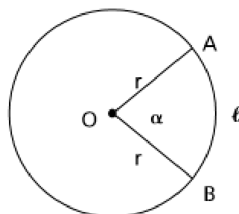
13. Ângulos na Circunferência

Elementos:



$\overline{AB}$: corda
$\overline{CD}$: diâmtero (2R)
$\overset{\frown}{AB}$: arco
$\overline{EF}$: flecha

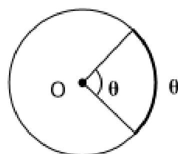
Comprimento de um arco:



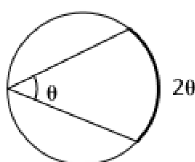
$$l = \frac{2\pi R\alpha}{360°}$$

Ângulos na circunferência:

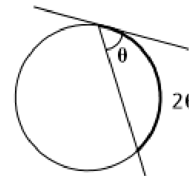
A) Central



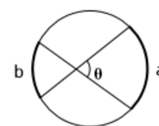
B) Inscrito

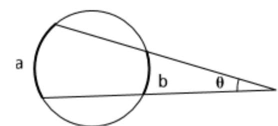


C) Segmento



D) Ângulo do vértice

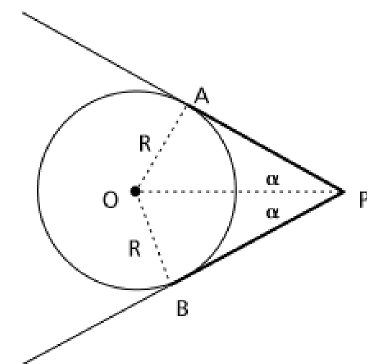




$\theta = \frac{a+b}{2}$ $\theta = \frac{a-b}{2}$

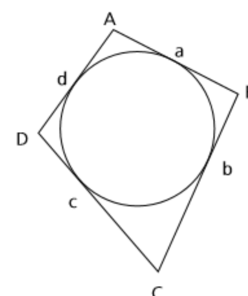
Teoremas:

A) Das tangentes



$\overline{PA} = \overline{PB}$

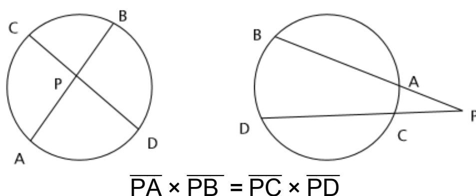
B) Pitot



a + c = b + d

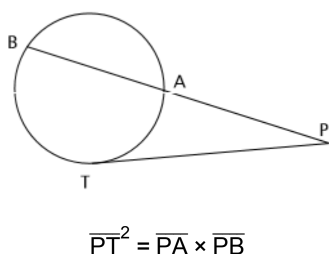
14. Relações Métricas na Circunferência

A)



$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$

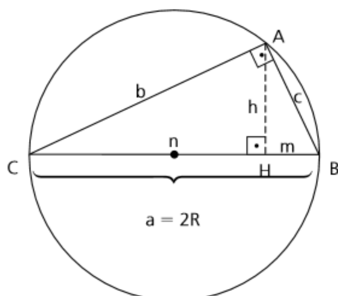
B)



$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$$

15. Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Elementos:



a: hipotenusa
b: cateto
c: cateto
m: projeção de c sobre a
n: projeção de b sobre a
h: altura relativa à hipotenusa

Relações:

A) $c^2 = a.m$
B) $b^2 = a.n$
C) $a^2 = b^2 + c^2$ (Pitágoras)
D) $h^2 = m.n$
E) $a.h = b.c$

Lei dos cossenos:

Em qualquer triângulo de lados a, b e c com o ângulo α oposto ao lado a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\text{sen}\theta$$

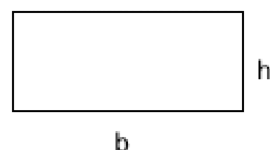
Lei dos senos:

Em qualquer triângulo de lados a, b e c com os ângulos α, β e γ oposto aos lados a, b e c, respectivamente.

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$

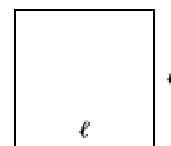
16. Áreas

Retângulo:



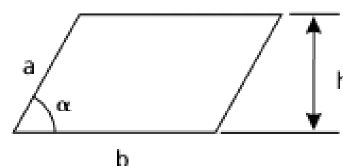
$A = b.h$

Quadrado:



$A = \ell^2$

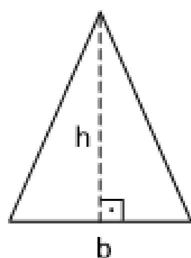
Paralelogramo:



$A = b.h$

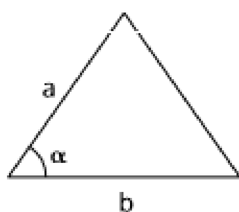
Triângulo:

A) Para qualquer triângulo



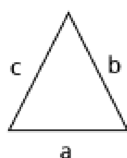
$$A = \frac{b.h}{2}$$

B) Usando dois lados e um ângulo



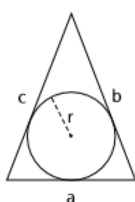
$$A = \frac{a.b.sen\alpha}{2}$$

C) Usando os três lados



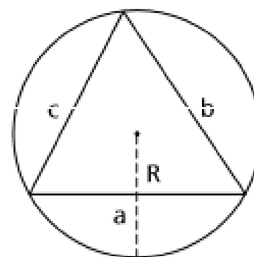
$$\begin{cases} A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ p = \dfrac{a+b+c}{2} \end{cases}$$

D) Usando o raio do círculo inscrito



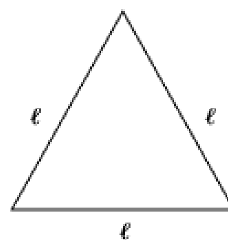
$$A = p.r$$

E) Usando o raio do círculo circunscrito



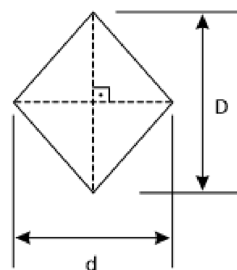
$$A = \frac{abc}{4R}$$

F) Triângulo equilátero



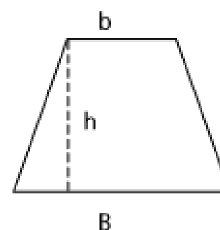
$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Losango:



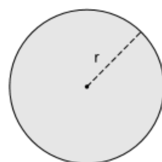
$$A = \frac{D.d}{2}$$

Trapézio:



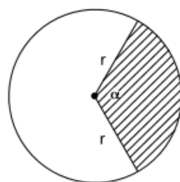
$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

Círculo:



$A = \pi R^2$

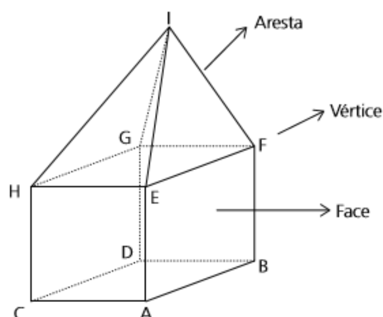
Setor Circular:



$$A = \frac{\pi R^2.\alpha}{360^o}$$

17. Poliedros

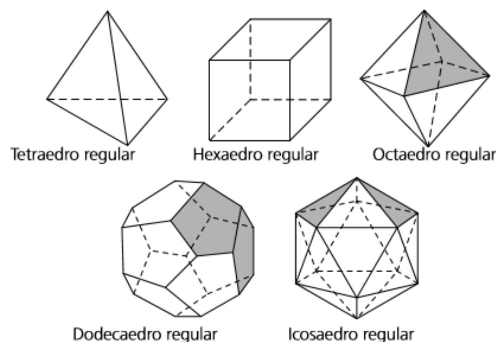
Elementos:



Teorema de Euler: V + F = A + 2

Poliedros regulares:

A	V	F	Nome
6	4	4	Tetraedro
12	8	6	Hexaedro
12	6	8	Octaedro
30	20	12	Dodecaedro
30	12	20	Icosaedro



Relações importantes:

A) $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ...$
B) $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ...$

Diagonais de um poliedro:

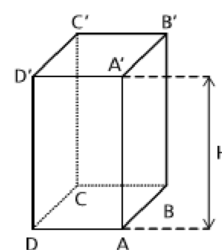
$$D = \frac{V(V-1)}{2} - A - \sum d_f$$

onde d_f representa as diagonais das faces.

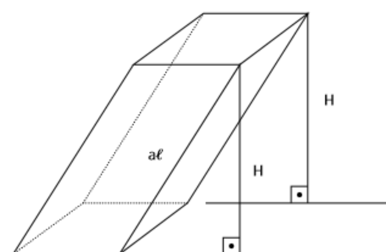
18. Prisma

Classificação:

A) Prisma reto



B) Prisma oblíquo



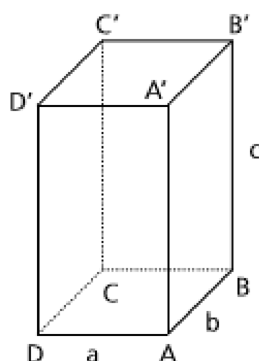
C) Prisma regular

Tem um polígono regular como base.

Área e Volume:

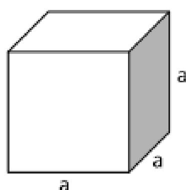
$A_{total} = 2.A_{base} + A_{lateral}$
$V = A_{base} \cdot h$

Paralelepípedo:



$$\begin{cases} A_{total} = 2(ab + ac + bc) \\ V = abc \\ d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases}$$

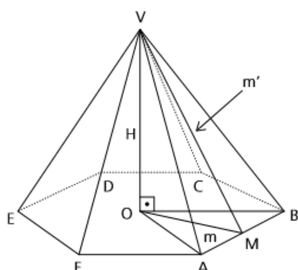
Cubo:



$$\begin{cases} A_{total} = 6a^2 \\ V = a^3 \\ d = a\sqrt{3} \end{cases}$$

19. Pirâmide

Relação entre apótemas:



m → apótema da base
m' → apótema da pirâmide (altura da face lateral)
h → altura da pirâmide

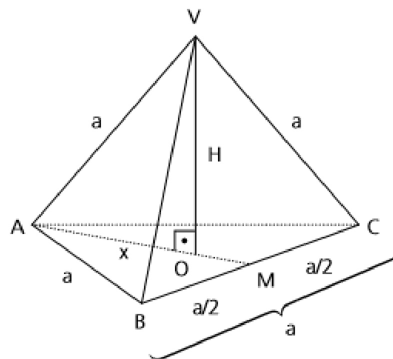
$$h^2 + m^2 = (m')^2$$

Área e volume:

$A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$

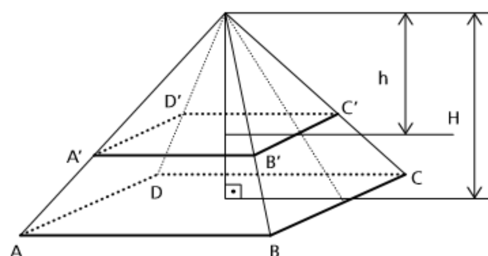
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

Tetraedro regular:



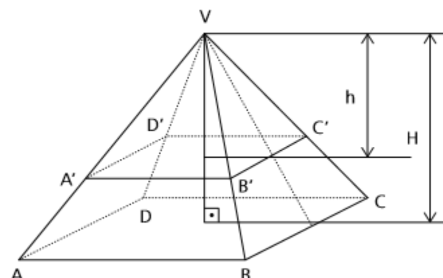
$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \qquad A_{total} = a^2\sqrt{3} \qquad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Tronco:



$$V_{tronco} = V - v$$

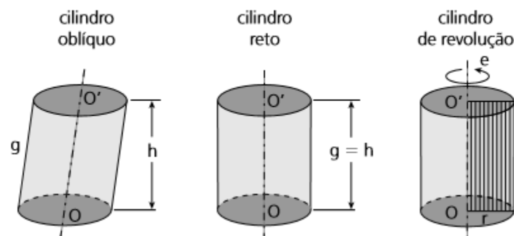
Razão de semelhança:



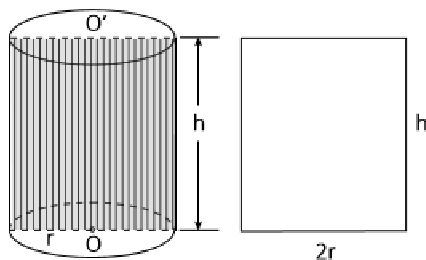
$$\frac{h}{H} = k \qquad \frac{a_{total}}{A_{total}} = k^2 \qquad \frac{v}{V} = k^3$$

20. Cilindro

Classificação:



Secção meridiana:

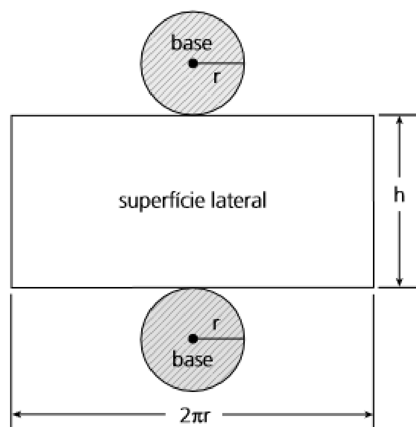


Cilindro equilátero:

Secção meridiana é um quadrado.

Cilindro em que $g = h = 2r$.

Áreas:

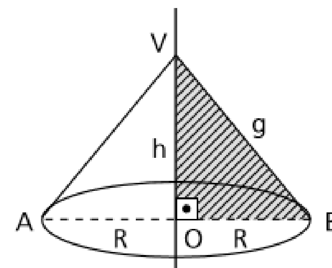


$A_{base} = \pi r^2$
$A_{total} = 2\pi r(r + h)$
$A_{lateral} = 2\pi rh$

Volume: $V = \pi r^2 h$

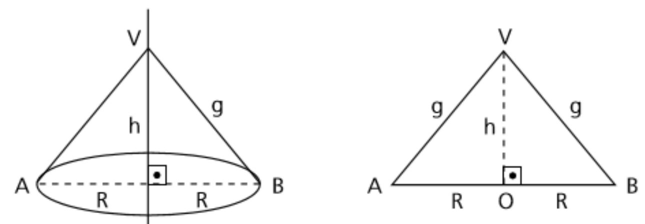
21. Cone

Elementos:



$g^2 = h^2 + R^2$

Secção meridiana:

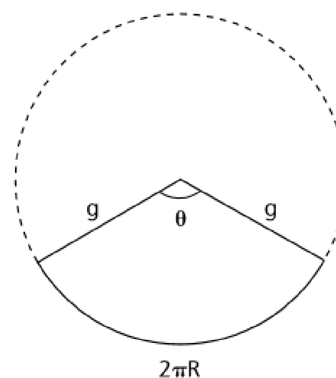


Cone equilátero:

Secção meridiana é um triângulo equilátero.

Cone que tem g = 2R e h = $R\sqrt{3}$

Áreas:

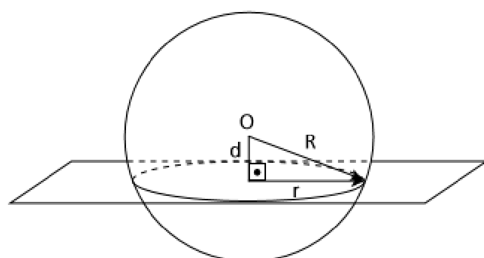


$A_{base} = \pi r^2$ $A_{lateral} = \pi rg$ $A_{total} = \pi r(r + g)$

Volume: $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

22. Esfera

Secção:

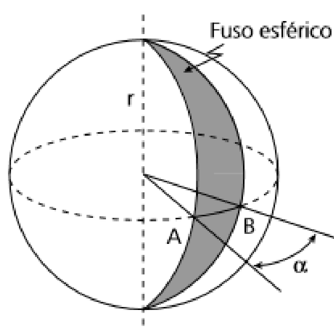


$$r^2 + d^2 = R^2$$

Área e Volume:

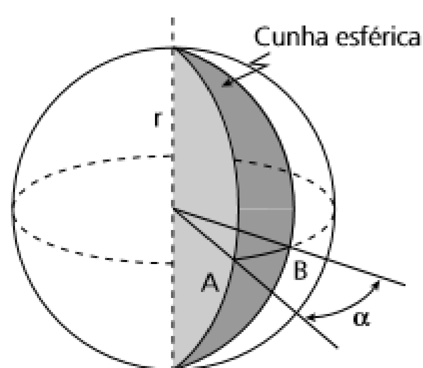
$$A = 4\pi R^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Fuso:



$$A_{fuso} = \frac{\alpha}{360} . 4\pi R^2$$

Cunha:



$$V_{cunha} = \frac{\alpha}{360} . \frac{4}{3}\pi R^3$$